جامعة محمد الأول
كلية العلوم - وجدة
Université Mohammed Premier
Faculté des Sciences Oujda
Département de Mathématiques et Informatique

كلية العلوم وجدة

COURS D'ANALYSE 1

FILIERE SMIA

PREMIER SEMESTRE

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2010-2011

CHAPITRE 1 : NOMBRES REELS

Pr : Mostafa BELGHIT

Contenu du chapitre

- Introduction et définitions
- Majorant , Minorant , Maximum et Minimum
- Borne supérieure et borne inférieure
- Droite numérique achevée
- Propriétés fondamentales de IR

  1) Propriété d'Archiméde
  2) Partie entière d'un réel
  3) Densité d'une partie de IR

Chapitre I

NOMBRES REELS

INTRODUCTION ET DEFINITIONS

Nous supposons que l'étudiant connait les ensembles usuels suivants ,ainsi que leurs propriétes liées aux opérations d'addition de multiplication et à la relation d'ordre.

$N=\{0,1,2,..............\}$ l'ensemble des entiers naturels.

$Z=\{.......,-3,-2,-1,0,1,2,3,........\}$ l'ensemble des entiers relatifs.

$Q=\left\{\frac{p}{q} \text{avec p et q } \in Z \text{ ,q } \neq 0\right\}$ l'ensemble des nombres rationnels.

La notion de nombre rationnel se révele insuffisante dans diverses situations.

donc voici un exemple.Il n'existe pas de nombre rationnel a tel que $a^2 = 2$

Preuve: Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\frac{p}{q} \in Q$ tel que $(\frac{p}{q}^2)= 2$.

On peut toujours supposer la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible . On a donc $p^2=2q^2$

d'où p^2 est pair

et donc lui-même pair, (car le carré d' un nombre impair est toujours impair).

Par conséquent p=2m avec m $\in N^*$,mais $4m^2=2q^2$. c'est à dire $2m^2=q^2$

d'où en déduit comme précedemment que q est pair.

Ceci contredit l'irréductibilité de $\frac{p}{q}$

Remarque :

Cet exemple montre l'impossibilité de résoudre dans Q certaines équations pourtant trés simples.Ce qui nous permet de construire un ensemble

plus vaste que Q qu'on l'appellera , l'ensemble des nombres réels : IR

parmi ceux-ci on distingue :

Ceux qui sont rationnels (les éléments de Q) et ceux qui sont des irrationnels (les éléments de IR/Q)

par exemple $\sqrt{2}$, π , e ne sont pas des éléments de Q .

Définition axiomatique de IR

On définit un nouveau ensemble ,noté IR contenant Q, dont on admet l'existence et dont ces élements sont appelés nombres réels ,muni de

deux lois internes +(addition)et ×(produit, noté par juxtaposion: xy plutôt x×y) et d'une relation d'ordre total ≤ ("plus petit ou égal") qui étendent celles de Q et qui vérifient les propriétés P_1 P_2 P_3 que nous allons passer en revue.

P_1) (IR,+,×) est corps commutatif

α)(IR,+) est un groupe commutatif qui s'éxprime parIR

* Pour tout a , b dans IR $a+b \in IR$ (loi interne)

* Pour tout a , b dans IR $a+b=b+a$ (commutativité)

* Pour tout a , b, c dans IR $a+(b+c)=(a+b)+c$ (associativité)

*L'entier 0 est élément neutre pour l'addition c'est à dire ,pour tout a dans IR $a+0=0+a=a$.

*Tour réel posséde un unique " opposé " b vérifiant $a+b=0$,il est noté $b=-a$.

β)(IR,+,×) est un anneau commutatif qui s'éxprime par la propriété (α) et :

*Pour tout a , b dans IR $ab \in IR$ (loi interne)

* Pour tout a , b dans IR $a+b=b+a$ (commutativité)

* Pour tout a , b, c dans IR $a(bc)=(ab)c$ (associativité).

* Pour tout a , b, c dans IR $a(b+c)=ab+ac$ et $(a+b)c=ac+ab$ (distributivité)

*1 est élément neutre pour le produit c'est à dire pour tout a dans IR $a1=1a=a$.

γ) Tout réel non nul a posséde un unique inverse b ,vérifiant $ab=1$

Ce réel est noté $b=a^{-1}$ou $b=\frac{1}{a}$

Remarques et notations

•Pour tous réels a et b , on note b-a plutôt que b+(-a) .On définit ainsi une nouvelle opération sur IR(soustraction) qui ne présente peu d'interet elle n'est commutative, ni associative.

•Pour toute partie A de IR ,on $(-A)=\{ -a$ tel que $a \in A \}$

•On note $Z=N \cup (-N)$ et on pose $Z=Z^*\setminus\{0\}$.

•La commutativité l'associativité de la loi + ont pour conséquence qu'on peut envisager des sommes $a_1+a_2+a_3......+a_n$ sans paranthéses et sans se préoccuper de l'ordre des termes.

Une telle somme est notée $\sum_{k=1}^{n} a_k$

•La commutativité , l'associativité de la loi × ont pour conséquence qu'on peut envisager un produit $a_1a_2a_3......a_n$ sans paranthéses et sans se préoccuper de l'ordre des termes , un tel produit est noté

$\prod_{k=1}^{n} a_k$

∘L'indice utilisé pour parcourir les termes de la somme et du produit est noté k mais le nom de l'indice importe peu , par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=1}^{n} a_k = \prod_{j=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_k$$

Ce qui importe c'est la valeur de départ de l'indice et la valeur finale

∘ Changement d'indice

On considére la somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$, on effectuant le changement d'indice i=k+1

k variant de 1 à n l'indice i variera de 2 à n+1 et comme k=i-1

on peut écrire $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$

De la même façon , on a :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$

La seule chose à laquelle il faut faire attention c'est qu'aprés le changement d'indice

on doit trouver dans la nouvelle somme (ou le nouveau produit) exactement les mêmes

termes que dans la somme initiale (ou le produit initiale)

∘ Régles de calculs

Soient λ , a_1, a_2 , ..., a_n , b_1, b_2 , ..., b_n des nombres réels , on a :

– Pour l'addition :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_k b_i \Big) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_i \Big)$$

– Pour la multiplication :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \times \prod_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k$$

•Propriétès On pose $IR^* = IR \setminus \{0\}$

∗Pour tout a,b dans IR $-(a+b) = -a-b$

∗Pour tout a dans IR $a0=0$

∗Pour tout a,b dans IR $a(-b)=(-a)b=-ab$ et $(-a)(-b)=ab$

∗Pour tout a dans IR^* $-a \in IR^*$ et $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

∗Pour tout a,b dans IR^* $ab \in IR^*$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

∗Pour tout a,b dans IR $ab=0 \Leftrightarrow (a=0)$ ou $(b=0)$.

On note habituellement :Pour tout a dans IR , Pour tout b dans IR^*

$$ab^{-1} = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Définition

Les éléments de IR/Q sont appelés nombres irrationnels.

P_2) IR est muni d'une relation d'ordre total "$\leq$ " vérifiant :

*Pour tout a,b dans IR $a\leq b \Rightarrow a+c\leq a+b$ (compatibilité avec l'addition)

*Pour tout a , b, c dans IR $(a\leq b)$ et $(c\leq d) \Rightarrow ac\leq bd$

(compatibilité avec la multiplication par un réel positif ou nul)

On résume P_1, P_2 ,en disant IR est un corps commutatif totalement ordonné

Rappelons ici qu'une relation d'ordre notée"$\leq$ " dans un ensemble E est une relation

- réflexive (pour tout a dans E $a \leq a$)
- antisymétrique (Pour tout a,b dans E $a \leq b$ et $b \leq a \Rightarrow a=b$)
- transitive(Pour tout a , b, c dans E $a \leq b$ et $b\leq c \Rightarrow a\leq c$)

Un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ est appelé Ordonné .

L'ordre est total lorsque deux éléments quelconques de E sont toujourscomparables pour $\leq$ c'est à dire pour tout a,b dans E ona $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Lorsqu'il existe au moins un couple (a,b) d'éléments de E non comparables pour $\leq$ .On dit que E est partiellement ordonné (c'est àdire l'ordre est partiel).

Remarques et notations

- On note pour tous réels a et b .
  - $a<b \Leftrightarrow (a\leq b)$ et $a\neq b$
  - $a \geq b \Leftrightarrow b\leq a$
  - $a > b \Leftrightarrow b<a$
- On pose $IR^{+*}=\{a\in IR \; a > 0\}$ $IR^{+}=\{a\in IR \; a \geq 0\}$ $IR^{-*}=\{a\in IR \; a <0\}$ $IR^{-}=\{a\in IR \; a \leq 0\}$
- Le tableau suivant résume les régles des signes

a	≥ 0	≤ 0	≥ 0	> 0	<0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
b	≥ 0	≤ 0	≤ 0	> 0	< 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
a+b	≥ 0	≤ 0	?	> 0	< 0	?	$>$	?	?	< 0
a b	≥ 0	≥ 0	≤ 0	> 0	> 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0

Propriétés

Ces propriétés résultent des propriétés P_1, P_2.

*$a+c \leq b+c \Leftrightarrow a \leq b$ et $a+c < b+c \Leftrightarrow a < b$

*$a\leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$ et $a< b \Leftrightarrow -b <-a$

*$a\leq 0 \Leftrightarrow -a \geq 0$ et $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

*$a > 0$ $a^{-1} \geq 0$ et $a <0 \Leftrightarrow a^{-1}<.0$

*$0< a < b \Rightarrow 0 < b^{-1}< a^{-1}$ et $a < b < 0 \Rightarrow b^{-1}< a^{-1} <0$

*$(a \leq b$ et $c \leq 0) \Rightarrow ac \geq bc$ et $a^2 \geq 0$

*$(a< b$ et $c > o) \Rightarrow ac < bc$ et $(a < b$ et $c < 0) \Rightarrow ac> bc$

P3)Axiome de la borne supérieure.

Toute partie non vide et majorée de IR possède une borne supérieure dans IR

On admet cet axiome de IR ,qui fait la spécifité de IR par rapport à Q.
Noter que l'ensemble Q avec ses opérations et son ordre usuel satisfait P1 , P2 mais ne satisfait pas P3 en d' autres termes ,
Q n'est pas un corps commutatif totalement ordonné où toute partie non vide , majoré posséde une borne supérieure , par exemple
A={ $a \in Q^+$ tel que $a^2 \leq 2$}n'admet pas de borne supérieure dans Q.
On reviendra plus tard à la définition de la borne supérieure et à cet exemple.

Introduisons dés maintenant quelques notations d'usage courant.

Intervalles de IR

Pour tous réels a et b ,on définit les ensembles suivants ,dits Intervalles de IR.

$[a,b]=\{x \in IR$ tel que $a \leq x \leq b\}$ $\qquad$ $[a,b[=\{x \in IR$ tel que $a \leq x < b\}$

$]a,b]=\{x \in IR$ tel que $a < x \leq b\}$ $\qquad$ $]a,b[=\{x \in IR$ tel que $a < x < b\}$

$[a,+\infty[=\{x \in IR$ tel que $a \leq x\}$ $\qquad$ $]a,+\infty[=\{x \in IR$ tel que $a < x\}$

$]-\infty,b]=\{x \in IR$ tel que $x \leq b\}$ $\qquad$ $]-\infty,b[=\{x \in IR$ tel que $x < b\}$

$]-\infty,+\infty[=IR \quad IR^+=[0,+\infty[\quad IR^{+*}=]0,+\infty[\quad IR^-=]-\infty,0] \quad IR^{-*}=]-\infty,0[$

Remarques et définitions

- On dit que $[a,b]$ (avec a < b) est le segment d'origine a et d'éxtrémité b
- Les intervales $]a,b[$ $]a,+\infty[$ $]-\infty,b[$ $]-\infty,+\infty[$ sont dits ouverts
- Les intervales $[a,b]$ $[a,+\infty[$ $]-\infty,b]$ $]-\infty,+\infty[$ sont dits fermés
- Les intervales $]a,b]$ $[a,b[$ sont dits semi-ouverts(où semi-fermés)
- Le segment $[a,a]$ se réduit à {a}; l'intervalle$]a,a[$ est vide
- Seuls les intervalles $[a,b]$ $]a,b[$ $]a,b]$ $[a,b[$ sont bornés
- Les segments sont les intervalles fermés bornés

Identités remarquables

- Formule de Binôme de Newton

$$\forall a,b \in IR \ ,\forall n \in N \quad (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^k \ b^{n-k}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

•<u>Carré d'une somme de n termes:</u> $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n} a_j a_k$

•Une factorisation classique

$\forall a,b \in IR\ ,\forall n \in N\ ,\ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\ b^k$

Si l'entier n est pair : $a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a^{n-k}\ b^k$

<u>En particulier</u> ♦$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

♦$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

♦$a^3 + b^3 = (a-b)(a^2-ab+b^2)$

•<u>Une somme classique:</u>

Pour tout réel $a \neq 1$ et tout entier naturel n $S_n(a) = 1 + a + a^2 + \dots\dots\dots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
et $S_n(1) = n+1$

<u>VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE</u>

<u>Définition</u>

Pour tout réel a , on pose $|a| = \max(-a,a) =$ a si $a \geq 0$ ou $-a$ si $a \leq 0$

Cette quantité est appelé <u>valeur absolue</u> de a
On vérifie immediatement les propriétés suivantes:

•Pour tout réel a $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|a| = |-a|$; $-|a| \leq a \leq |a|$

• $\forall x \in IR$; $\forall r \in IR^+$

$|x| = r \Leftrightarrow x \in \{-r, r\}$; $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$; $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$; $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$

$|x| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty, r] \cup [r, +\infty[$; $|x| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty, r[\cup]r, +\infty[$

• $\forall a\ b \in IR$ $|ab| = |a|\ |b|$ •$\forall\ n \in N$ $|a^n| = |a|^n$(même chose si $a \neq 0$ et $n \in Z$)

• $\forall a\ b \in IR$ $a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$ et $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$

• $\forall a\ b \in IR$ $|a+b| \leq |a| + |b|$ et on a l'égalité $|a+b| = |a| + |b|$ si et seulement si a et b ont le même signe.

- $\forall a\, b \in IR \quad ||a| - |b|| \leq |a-b|$

Généralisation

Pour tout réels $a_1, a_2, \ldots a_n$ on a $\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|$ et $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

On a l'égalité $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ si est seulement si les a_k ont tous le même signe

Définition

Pour tout réel a on note $a^+ = \max(a,0)$ et $a^- = \max(-a,0)$
Avec ces notations ,pour tout réel a $a^+ \geq 0$; $a^- \geq 0$;$a = a^+ - a^-$

Pour tous réels a et b $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ et $\min(a+b-|a-b|)$
Définition

Pour tous réels a et b la quantité $d(a,b)=|a-b|$ est appelée distance de a et b.
Elle vérifie:
Pour tous réels a , b et c $d(a,b) \geq 0$; $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$ et $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

Pour tous réels a et b on a $d(|a|,|b|) \leq d(a,b)$ c'est àdire $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Quelques inégalités classiques

Voici trois inégalités souvent utiles

Pour tous réels a et b $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (égalité si est seulement si a=b)

Pour tout $a \in [0,1]$ $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$(égalité si est seulement si $a=\frac{1}{2}$)

$|a| \leq k < 1 \Rightarrow 1-k \leq |1+a| \leq 1+k$

Proposition (Inégalité de Cauchy - Schwarz)

Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on a:
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2)$

Il ya égalité si est seulement si les n-uplets $u=(a_1,a_2,\ldots a_n)$et $v=(b_1,b_2,\ldots b_n)$ sont proportionnels.

Proposition (Inégalité de Minkowski)

Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ on a:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leq (\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}) + (\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2})$$

BORNE SUPERIEURE ,BORNE INFERIEURE ;MAXIMUM ;MINIMUM

Rappelons tout d'abord quelques définitions Soit A une partie non vide de IR .

•A est dite majorée si :∃ un réel M tel que $\forall x \in A \quad x \leq M$.
On dit aussi que A est majorée par M ou M majoreA.

•A est dite minorée si :∃ un réel m tel que $\forall x \in A \quad m \leq x$.
On dit aussi que A est minorée par m ou m minore A.

•A est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée
On retiendra la proposition suivante

A est bornée si est seulement si $\exists K \in IR^{+*}$ tel que pour tout $x \in A \ |x| \leq K$

Définitions

•Lorsqu'il existe , On dit que le réel M est maximum de A

(ou parfois le plus grand élément de A)
si M est un majorant de A et $M \in A$, on le note maxA.
•Lorsqu'il existe , On dit que le réel m est minimum de A

(ou parfois le plus petit élément de A)
si m est un minorant de A et $m \in A$, on le note minA
•Notons que maxA et minA ,s'ils existent , sont uniques.

(on utilesera l'antisymétrie de ≤ pour le vérifier).

•Soit A une partie non vide majorée de IR . On appelle **borne supérieure de A**

le plus petit des majorants de A , on la note supA , autrement dit ,
$(\forall a \in A$ tel que $a \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$
• Cela équivaut à dire que supA est un majorant de A et que
tout réel strictement inférieur à supA n'est plus un majorant de A.
(l'ensemble des majorants est alors $[\sup A, +\infty[$).
•Soit A une partie non vide minorée de IR . On appelle borne inférieure de A

le plus grand des minorants de A, on la note infA , autrement dit ,
$(\forall a \in A$ tel que $m \leq a) \Rightarrow m \leq \inf A$
•Cela équivaut à dire que InfA est un minorant de A et que
tout réel strictement supérieur à InfA n'est plus un minorant de A.

(l'ensemble des minorants est alors $[-\infty , \text{InfA}]$)

•On retiendra aussi que le SupA et InfA s'ils existent sont nécessairement uniques.

•On veillera à bien distinguer les notions de Maximum et de borne supérieure (minimum et de borne inférieure).

Exemple :

A=[a , b [, infA=a et supA = b

Remarquons d'aprés cet exemple que la borne supérieure ou la borne inférieure d'une partie n'appartiennent pas néssairement à A

• On vérifié par ailleurs immédiatement que si :

Si A est non vide et majorée alors : $M=\max A \Leftrightarrow (M=\sup A \text{ et } M \in A)$

Si A est non vide et minoré alors : $m = \min A \Leftrightarrow (m = \inf A \text{ et } m \in A)$

Ce qui permet de savoir les rapports entre (Sup et Max); et;(Inf et Min)

•La caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure est souvent utilisée.

Proposition :

Soit A une partie non vide et majorée de IR

$$M=\text{SupA} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } M \text{ est un majorant de } A \\ \text{ii) } \forall\, \varepsilon \text{ réel} > 0 \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } M-\varepsilon < a \end{cases}$$

Preuve:

<u>condition nécessaire:</u>

soit M=supA alors i) est évident ,par ailleurs ,si ii) n'a pas lieu , alors $\exists\, \varepsilon >0$ tel que pour tout $a \in A$ $a \leq M-\varepsilon$, ce qui montre que $M-\varepsilon$ est un majorant de A .

Ceci contredit le fait que M est le plut petit majorant de A.

<u>condition suffisante:</u>

Soit M' un autre majorant de A montrons alors que $M \leq M'$.

Sinon $M' < M$. Posons $\varepsilon = M - M'$ d'aprés ii) $\exists\, a \in A$ tel que $M' < a$.

ce qui contredit le fait que M' est un majorant de A.

Remarque : On bien sûr une caractérisation analogue pour la borne inférieure

Proposition :

Soit A une partie non vide et minorée de IR

$$m=\inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } m \text{ est un minorant de } A \\ \text{ii) } \forall \varepsilon \text{ réel} > 0 \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } a<m+\varepsilon \end{cases}$$

Remarque

L'axiome de la borne supérieure étant admis ,on peut démontrer le résultat suivant :

Proposition :

Toute partie non vide et minorée de IR possède une borne inférieure dans IR.

Preuve :

Il suffit de remarquer que A est minorée $\Leftrightarrow(-A)=\{-a \text{ tel que } a\in A\}$ est majorée

et que $\mathrm{Inf}A=-\mathrm{Sup}(-A)$.

Propriétés de la borne Sup et de la borne Inf

Proposition1:

Si B est majorée et si $A \subset B$ alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$

Si B est minorée et si $A \subset B$ alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$

Proposition2:

Si A est majorée , alors (-A) est minorée et $\inf(-A) =-\sup(A)$

Si A est minorée , alors (-A) est majorée et $\sup(-A) =-\inf(A)$

Proposition3:

Si A et B sont majorées , alors $A+B=\{ a+b , a \in A \text{ et } b\in B.\}$ est majorée

et $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

Si A et B sont minorées , alors $A+B=\{ a+b , a \in A \text{ et } b\in B.\}$ est minorée

et $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

Proposition4

Si A et B sont majorées alors $A\cup B$ est majorée et $\sup(A\cup B)=\sup(\sup A,\sup B)$

Si A et B sont minorées alors $A\cup B$ est minorée et $\inf(A\cup B)=\inf(\inf A,\inf B)$

Proposition5

Si A et B deux parties non vides et majorées de IR_+^* alors $A.B=\{ a.b , a \in A \text{ et } b\in B\}$

est majorée et $\sup(A.B)=(\sup A).(\sup B)$ et $\inf(A.B)=(\inf A).(\inf B)$

Enfin les résultats suivants sont évidents.Pour tous réels a et b avec $a<b$ on a :

•$\sup([a,b])=\sup([a,b[)=\sup(]a,b])=\sup(]a,b[)=\sup(]-\infty,b])=\sup(]-\infty,b[) = b$

•$\inf([a,b])=\inf([a,b[)=\inf(]a,b])=\inf(]a,b[)=\inf([a,+\infty[)=\inf(]a,+\infty[) = a$

Preuve de la proposition 1

B majorée $\Rightarrow$supB existe et que $\forall x \in B \ \ x \leq \sup B \Rightarrow \forall x\in A (A\subset B) \ \ x \leq \sup B$

$\Rightarrow$ supB est un majorant de A $\Rightarrow$A est majorée et que $\sup A \leq \sup B$

L'autre moitié de la proposition se démontre de la même manière.

Preuve de la proposition 2

A est minorée $\Rightarrow$infA existe $\Rightarrow \forall x\in A \ \ \inf A\leq x \Rightarrow \forall x\in A \ \ -x\leq -(\inf A) \Rightarrow(-A)$

est majorée par $-(\inf A)$,d'aprés la caractérisation de la borne inf(A)

on a $\forall \varepsilon >0 \ \exists x_0 \in A$ tel que $-\varepsilon -(\inf A) <-x_0$.

On posant $x_1=-x_0$; obtient donc $\forall \varepsilon >0 \ \ \exists x_1 \in(-A)$ tel que $-(\inf A)-\varepsilon <x_1$.

d'oú d'aprés la cacartérisation de la borne supérieure et l'unicité de borne

supérieure on obtient $\sup(-A)= -\inf A$.

Un raisonnement analogue pour l'autre moitiè de la proposition 2

Preuve de la proposition 3

A majorée $\Rightarrow M_A = \sup A$ existe et $\forall a \in A \ \ a \leq M_A$

B majorée $\Rightarrow M_B = \sup B$ existe et $\forall b\in B \ \ b \leq M_B$

d'où $\forall a \in A \ \forall b\in B \ \ a+b \leq M_A + M_B \Rightarrow$ A+B est majorée par $M_A + M_B$..

en plus $\forall \varepsilon >0 \ \ \exists a_0 \in A$ tel que $M_A - \frac{\varepsilon}{2} < a_0$et $\exists b_0 \in B$ tel que $M_B - \frac{\varepsilon}{2} < b_0$

ce qui implique l'existence de $c_0 = a_0+b_0 \in A+B$ tel que $M_A + M_B - \varepsilon<c_0$

par conséquent $M_A + M_B$est le plus petit majorant de A+B et que

$\sup A+\sup B = \sup(A+B)$

Un raisonnement analogue pour l'autre moitiè de la proposition 3

Preuve de la proposition 4

A majorée $\Rightarrow M_A = \sup A$ existe ; B majorée $\Rightarrow M_B = \sup B$ existe

Posons $M=\sup(M_A,M_B)$ alors M majore A et B et par suite M majore $A\cup B$

Comme A et B jouent le même rôle , on suppose que $M = M_A$ d'où $M_B \le M_A$

d'aprés la caractérisation de la borne sup , on a $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_0 \in A\ \ M_A - \varepsilon < a_0$
d'où $\exists a_0 \in A \cup B$ tel que $M_A - \varepsilon < a_0$ ce qui implique que $M = \sup(M_A, M_B)$

et par conséquent $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.

Un raisonnement analogue pour l'autre moitiè de la proposition 4

Preuve de la proposition 5

On a $\forall (a,b) \in A \times B$, $ab \le \sup A \sup B$ donc AB est majoré et $\sup(AB) \le \sup A \sup B$(*)

Soit $b \in B$ on a $\forall a \in A$, $a \le \dfrac{\sup(AB)}{b}$ ($b \neq 0$) donc $\sup(A) \le \dfrac{\sup(AB)}{b}$, on obtient :

$\forall b \in B$, $b \le \dfrac{\sup(AB)}{\sup(A)}$ donc $\sup(B) \le \dfrac{\sup(AB)}{\sup(A)}$ $\Rightarrow \sup A \sup B \le \sup(AB)$(**)

(*) et (**) $\Rightarrow$ l'égalitè $\sup A \sup B = \sup(AB)$

DROITE NUMERIQUE ACHEVEE.

Définition

On note $\overline{IR}$ l'ensemble $IR \cup \{-\infty , +\infty\}$. Cet ensemble est appelé droite numérique achevée.

Relation d'ordre dans $\overline{IR}$

On munit $\overline{IR}$ d'un ordre total $\le$ prolongeant celui de IR en posant :

$x \le y$ lorsque $x = -\infty$ et $y \in \overline{IR}$ ou $x , y \in IR$ et $x \le y$ au sens de IR

ou $x \in \overline{IR}$ et $y = +\infty$

Opérations sur $\overline{IR}$

On " étend" (de façon commutative) les lois + et $\times$ de IR en posant :

• $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$; $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$; $(+\infty)(+\infty)=+\infty$;

$(-\infty)(-\infty)=+\infty$; $(+\infty)(-\infty)=+\infty$

• $\forall x \in IR\ \ x+(-\infty)=-\infty\ \ x+(+\infty)=+\infty$

• $\forall x \in IR^{+*}\ \ x(-\infty)=-\infty$; $x(+\infty) = +\infty$

• $\forall x \in IR^{-*}\ \ x(-\infty)=+\infty$; $x(+\infty) = -\infty$

Formes indéterminées

Comme on le voit , on donne pas de valeur aux expressions suivantes.

$(+\infty)+(-\infty)$; $0\times(+\infty)$; $0\times(-\infty)$.

L'un des intérêts de l'introduction de $+\infty$et $-\infty$ réside dans la propriété suivante :
Dans $\overline{IR}$, toute partie A admet une borne supérieure et une borne inférieure

En effet .Faisons la démonstration pour la borne sup .Si A est vide ou égal

à$\{-\infty\}$ alors tout élement de $\overline{IR}$ majore A et donc supA $=-\infty$.
Si A est non vide et $\neq$ de $\{+\infty\}$ et si A est majorée par un nombre réel

alors l'axiome de la borne sup garantit l'existence d'une borne sup dans IR .
Enfin si A n'est pas majorée par un réel , alors le seul majorant de A est $+\infty$ et

donc supA$=+\infty$

■PROPRIETES FONDAMENTALES DE IR

Proposition (IR est un corps Archimèdien ou Propriété d'Archimède)
$\forall b\in IR$ et $\forall a$ un réel strictement positif , $\exists$ un entier $n \in N$ tel que $na>b$
Preuve : Sinon $\exists b\in IR$ et $a\in IR^{+*}$ tel que $\forall n\in N$ $na\leq b$.

Considérons l'ensemble $A=\{na$ telque $n\in N\}$. A est non vide ($a\in A$)
et majoré par b donc A posséde une borne supérieure α dans IR
(axiome de la borne supérieure dans IR).
Comme α-a<α alors α-a n'est pas un majorant de IR ,donc
$\exists$ $n_0$dans N^*tel que $an_0 > \alpha-a$
d'où $(n_0+1)a> \alpha$,ce qui contradictoire avec la définition de α.
Remarque:
Dans le cas particulier où a=1 on obtient $\forall b\in IR$ $\exists$ un entier $n \in N$ tel que $n>b$
ceci traduit que L'ensemble des entiers naturels n'est pas majoré
Proposition et Définition:
Pour tout x réel , il existe un entier relatif q unique tel que $q\leq x<q+1$
On l'appelle partie entière de x et on le note E(x) ou [x]
(E(x) est le plus grand entier relatif $\leq$ à x et

E(x)+1 est le plus petit entier relatif strictement supérieur à x)
Preuve :
Unicitè:soient petq deux entiers relatifs tel que $p\leq x<p+1$ et $q\leq x<q+1$
alors on a :
$p < q+1$ ce qu'implique $p \leq q$. Par symétrie des rôles de p et q
on obtient $q \leq p$ et par antisymétrie on obtient $p = q$.
Existence :
Soit $x \in IR$ et soit $B=\{k\in Z$ tel que $k\leq x\}$ alors:

B est une partie non vide de Z car d'aprés la propriété d'Arcimède $\exists$ n $\in N\subset Z$ tel que $n > |x|$ soit $-n < x < n$ c'est à dire $-n \in B$
de plus B est majorée par x
donc admet un maximum dans Z noté q ,autrement dit :
$q \in B \Rightarrow q \leq x$ et que $(q+1) \notin B \Rightarrow q+1 > x$
donc $\forall x\in IR\ \exists\ q \in Z$ tel que $q\leq x < q+1$.

Conséquence:

- Pour tout x $\in$IR et tout entier relatif k on a:
  $x-1< E(x) \leq x$; $E(x)=x \Leftrightarrow x\in Z$, $E(x)=k \Leftrightarrow x\in [k , k+1[$;
  $(x-E(x))\in [0, 1[$; $x=E(x)+r$ avec $r\in [0, 1[$.
- Pour tout x,y dans IR tel que $x\leq y$ alors $E(x)\leq E(y)$
- $E(x)+E(-x)=-1$ si $x\in IR\backslash Z$ et $E(x)+E(-x)=0$ si $x\in Z$
- $\forall x\in IR\ \ \forall m\in Z\ \ E(x+m)=E(x)+m$

EXEMPLES

1) Soit $A=\{ \frac{n+1}{n+2}, n\in N \}$ alors supA=1 , minA=infA=$\frac{1}{2}$
mais ne posséde de maximum.

En effet :A est non vide ($\frac{2}{3} \in A$, n=1)

$\forall n \in N$ on a $n+1<n+2 \leq 2(n+1)$ d'oú $\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{n+2} <1$ et par conséquent
A est borné
Comme A est minoré par $\frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} \in A$ (n=0) on déduit donc minA=infA=$\frac{1}{2}$

1 est un majorant de A , montrons que 1 est le plus petit majorant de A

Sinon $\exists\alpha \in IR$ (majorant de A) tel que $\forall n \in N\ \frac{n+1}{n+2} \leq \alpha<1$
c'est à dire $\forall n \in N\ n\leq (\frac{1}{1-\alpha} -2)$

et ceci contredit le fait que N n'est pas majoré.
comme supA=1et $\notin$ A alors maxA n'existe pas.

Une maniére différente pour prouver que supA=1 en utilisant la caractérisation de la borne supérieure ;en effet:
d'aprés la propriéte d'Archimède,$\forall\varepsilon >0\ \exists\ n_0 \in N$ tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}-2$
ceci est équivalent à $1-\varepsilon <\frac{n_0+1}{n_0+2}$

2)Soit $A=\{ \frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}$ tel que $(n,m)\in N^* \times N^*\}$

i) montrons que A est borné.

en effet:pour tout $n\in N^*$et $m\in N^*$on a:$0<\frac{1}{n^2} \leq 1$ et $0<\frac{1}{m^2} \leq 1$ et donc
$0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2} \leq 2$ et par conséquent A est borné.

ii)montrons que maxA=2.

en effet comme pour tout $n\in N^*$ et $m\in N^*$ $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2} \leq 2$

on en déduit que 2 majore A

et que $2\in A$ (n=m=1) et par conséquent maxA=2.=supA.

iii)montrons que: $\forall k\in N^*\ \exists (n_0,m_0)\in N^* \times N^*$ tel que $\frac{1}{n_0^2}+\frac{1}{m_0^2} < \frac{1}{k}$.

en effet d'aprés la propriéte d'Archimède $\forall k\in N^*\ \exists n_0 \in N^*$ tel que $n_0 > \sqrt{2k}$

et $\exists m_0 \in N^*$ tel que $m_0 > \sqrt{2k}$ par suite $\frac{1}{n_0^2}+\frac{1}{m_0^2} < \frac{1}{k}$

iv)En déduire que infA=0.

en effet comme pour tout $n\in N^*$ et $m\in N^*$ $0<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}$

on en déduit que 0 est un minorant de A .

Soit α un minorant de A tel que $0<\alpha$; donc pour tout $n\in N^*$ et $m\in N^*$

$\alpha \leq \frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}$, en particulier pour le couple (n_0,m_0) autrement dit:

$\alpha \leq \frac{1}{n_0^2}+\frac{1}{m_0^2} < \frac{1}{k}$ c'est à dire $\forall k\in N^*\ k< \frac{1}{\alpha}$

et ceci contredit le fait que N n'est pas majoré

Une maniére différente pour prouver que infA=0 en utilisant la caractérisation de la borne inférieure ;en effet:

d'aprés la propriéte d'Archimède, $\forall \varepsilon >0\ \exists\ n_0 \in N^*$ tel que $n_0 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$

et $\exists\ m_0 \in N^*$ tel que $m_0 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ d'où $0 <\frac{1}{n_0^2}+\frac{1}{m_0^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

•Proposition (Densité de Q dans IR)

Soient a et b deux réels avec a<b alors $\exists\ r\in Q$ tel que a<r<b

en géneralisant cette situation en disant que l'intervalle] a,b[contient une infinité de nombres rationnels.

Preuve :

Soit $(a,b) \in IR^2$ tel que a<b et posons ε =b-a >0 . Comme IR est archimédien alors $\exists\ n\in N^*$ tel que $n\varepsilon>1$ ($0<\frac{1}{n} < \varepsilon$) .

Posons par la suite q = E(nx) et p =q+1

alors on aura $p-1\leq nx < p$ par suite $x <\frac{p}{n}$ et $\frac{p}{n} \leq x+\frac{1}{n}$ par conséquent on aura

$(x <\frac{p}{n} \leq x+\frac{1}{n} < x+\varepsilon) \Rightarrow x<\frac{p}{n} <y$ avec $\frac{p}{n} \in Q$

On a bien sûr une propriété de densité de IR\Q qui s'exprime par:

Entre deux réels distincts , il existe un irrationnel

Application :
On considére l'ensemble $A=\{x \in Q^+/ x^2 \leq 2\}$ montrons que A est une partie non vide
majorée dans Q ne possédant pas de borne supérieure dans Q.

A est non vide($1 \in A$)et est majorée par 2 par exemple.

Supposons que A posséde une borne supérieure α dans Q ($\alpha \in Q^+$)

•Soit $\alpha^2=2$ (cequi est impossible) ou $\alpha^2 < 2$ou $\alpha^2 \succ 2$.

•Dans le cas $\alpha^2 < 2$ on a $\alpha < \sqrt{2}$ et comme Q est dense dans IR

il existe β dans Q tel que $\alpha < \beta < \sqrt{2}$ et par conséquent $\beta \in A$ et est $> \alpha$

ce qui est absurde.
•Dans le cas $\alpha^2 > 2$ on a $\alpha > \sqrt{2}$ et commeQ est dense dans IR il existe β dans Q
tel que$\sqrt{2} < \beta < \alpha$ et par conséquent β majore A et est $<\alpha$ ce qui est absurde.

Définition : Une partie A de IR est dite dense dans IR ssi
$\forall (x,y) \in IR^2 : (x<y \Rightarrow \exists a \in A$ tel que $x<a<y)$
Exemple :

On considére l'ensemble $A=\{ q^2$tel que $q \in Q\}$ et $B=A \cup (-A)$
montrons que B est dense dans IR

(pour tout x et y dans IR tel que x<y il existe p $\in B$ tel que x<p<y).En effet :

• si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; $\exists q \in Q$ tel que $\sqrt{x} < q < \sqrt{y}$, d'où $x<q^2<y$ et $q^2 \in B$

•si $y \leq 0$,alors $\sqrt{-y} < \sqrt{-x}$ $\exists q \in Q$ tel que $\sqrt{-y} < q < \sqrt{-x}$ d'où
$x<-q^2<y$ et $-q^2 \in B$

•si x<o et $y \succ 0$, on peut prendre $q=0 (q^2 = 0)$.

BIBLIOGRAPHIE

+Titre : Fonctions d'une variable (cours avec exemples et exercices corrigés)
Auteurs : Bernard CALVO et Adina CALVO
Edition : Masson

**Titre : Analyse et Géométrie différentielle ,premiére année MPSI , cours et exercices corrigés
Auteurs : Marie ALLANO-CHEVALIER et Xavier OUDOT) , H prépa
Edition : Hachette Supérieure

**Titre : Analyse MPSI (Cours et 1000 exercices corrigés)
Auteur : Jean Marie Monier
Edition : Dunod

+Titre : Analyse première année (cours et exercices avec solutions)
Auteurs : François Liret et Dominique Martinais
Edition : Dunod

**Titre : Analyse MPSI (cours , méthodes , exercices résolus)
Auteurs : D.GUININ et B.JOPPIN
Edition : Bréal

+Titre : Analyse 1
Auteurs : Louis Jérémy . Pierre Mineau . Jean-claude Thiénard
Edition : Vuibert